



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025

CLASA a 10-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema 1 (autor ***, SGM nr. 10/2024)

a) Dacă n este un număr natural nenul și z este un număr complex de modul 1, demonstrați că $|1+z| + |1+z^{2n}| + |1+z^{2n+1}| \geq 2$.

b) Determinați valoarea minimă a sumei

$$1012 \cdot |1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| + \dots + |1+z^{2024}| + |1+z^{2025}|$$

când z parcurge mulțimea numerelor complexe de modul 1.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $ 1+z + 1+z^{2n+1} \geq 1+z - (1+z^{2n+1}) = z 1-z^{2n} = 1-z^{2n} $	2p
$ 1+z + 1+z^{2n} + 1+z^{2n+1} \geq 1-z^{2n} + 1+z^{2n} \geq 1+z^{2n} + 1 - z^{2n} = 2$	1p
b) Suma este $S = \sum_{k=1}^{1012} (1+z + 1+z^{2k} + 1+z^{2k+1}) \geq 2 \cdot 1012 = 2024$	2p
Pentru $z = -1$ obținem $S = 2024$, deci minimul cerut este 2024	2p

Problema 2 (autor Mihail Bălună)

Determinați tripletele de numere naturale (a, b, c) , pentru care numerele $\log_a(b+c)$, $\log_b(c+a)$ și $\log_c(a+b)$ sunt naturale.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Existența logaritmilor impune $a, b, c \geq 2$; de aici reiese $a^2 \geq 2a$, $b^2 \geq 2b$, $c^2 \geq 2c$	1p
Dacă toți logaritmi sunt > 1 , atunci ei sunt cel puțin 2, deci $b+c \geq a^2$ și analoagele, de unde, prin adunare, $2a+2b+2c \geq a^2+b^2+c^2$, ceea ce duce la $a=b=c=2$	2p
În caz contrar un logaritm este 1 deci, de exemplu, $a=b+c$. Reiese $\log_b(b+2c) \geq 2$, $\log_c(2b+c) \geq 2$, de unde $3b+3c \geq b^2+c^2$, sau $(2b-3)^2 + (2c-3)^2 \leq 18$, ceea ce duce la $b \leq 3$, $c \leq 3$.	3p
Verificând posibilitățile obținem $b=c=3$, $a=6$ și analoagele, deci avem și soluțiile $(6, 3, 3)$, $(3, 6, 3)$ și $(3, 3, 6)$	1p

Problema 3 (autor ***)

Determinați toate funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care sunt injective și îndeplinesc condiția:

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + 1, \text{ oricare ar fi numerele reale } x \text{ și } y.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
$f(x + f(y)) = f(x + y) + 1 = f(y + x) + 1 = f(y + f(x))$, deci $x + f(y) = y + f(x)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$, ceea ce arată că $g(x) = f(x) - x$ este constantă	4p
Punând $f(x) - x = c$ rezultă $x + y + 2c = x + y + c + 1$, de unde $c = 1$	2p
Funcția dată de formula $f(x) = x + 1$ convine	1p

Problema 4 (autor ***)

a) Arătați că există un număr natural a pentru care numărul $A = \sqrt[3]{7 + \sqrt{a}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{a}}$ este natural.

b) Există un număr natural b pentru care numărul $B = \sqrt{7 + \sqrt[3]{b}} + \sqrt{7 - \sqrt[3]{b}}$ este natural?

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Avem $A^3 = 14 + 3A\sqrt[3]{49 - a}$, deci $\sqrt[3]{49 - a}$ trebuie să fie rațional, de unde reiese că $49 - a$ trebuie să fie cub perfect, iar $3A$ trebuie să dividă $A^3 - 14$. Aceasta se întâmplă dacă $a = 50$; în acest caz $A = 2$. <i>Observație.</i> Dacă observăm că $(1 + \sqrt{2})^3 = 7 + 5\sqrt{2}$, putem „ghici” direct că $a = 50$.	3p
b) Avem $B^2 = 14 + 2\sqrt{49 - \sqrt[3]{b^2}}$, deci dacă B este natural, atunci $\sqrt[3]{b^2}$ este număr natural	2p
În acest caz b este cub perfect: $b = k^3, k \in \mathbb{N}$, iar $49 - k^2$ este pătrat perfect. Singura posibilitate este $k = 7$, dar în acest caz $B = \sqrt{14} \notin \mathbb{N}$. Așadar, răspunsul este „NU”.	2p